УДК 517.9

ФОРМУЛА ФЕЙНМАНА-КАЦА В ВОПРОСАХ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

©В. П. Бурский, О. В. Самойлова

В работе [1] была рассмотрена следующая задача:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + V(x)u & (x \in R^N,\ t > 0) \\ u(x,0) = f(x) & (x \in R^N) \end{cases} \tag{1}$$

$$0 \leq f \in L^1(R^N), \ , \ V(x) = \frac{c}{|x|^2}$$

Интерес к задаче с указанным потенциалом вызван тем, что, как известно, при $0 \leq V \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(R^N \setminus \{0\})$, $V(x) \leq c/|x|^{2-\varepsilon}$, $c > 0$, $\varepsilon > 0$ в окрестности нуля задача (1) имеет единственное неотрицательное решение в смысле распределений, а при $V(x) \geq c/|x|^{2+\varepsilon}$, $c > 0$, $\varepsilon > 0$ в некоторой окрестности нуля, задача (1), как показали *H.Brezis* и *I.L.Lions*, не имеет неотрицательного решения.

Наряду с задачей (1) рассматривается задача (2), которая получается из (1) при замене $V(x)$ на $V_n(x)$, где $V_n(x)$ определяется следующим образом:

$$V_n(x) = \begin{cases} c/|x|^2, & |x| \geq 1/n \\ cn^2, & |x| < 1/n \end{cases}$$

т.е. (2) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_n}{\partial t} = \Delta u_n + V_n(x)u_n & (x \in R^N,\ t > 0) \\ u_n(x,0) = f(x) & (x \in R^N) \end{cases} \tag{2}$$

Результатом работы [1] является теорема:

Теорема 1 . *Пусть $u_n(x,t)$ удовлетворяет (2).*

1. Пусть $c > c^*(N) = (N-2)^2/4$. Тогда $u_n(x,t) \to \infty$ для всех $x \in R^N$, $t > 0$. И задача (1) не имеет неотрицательного решения.

2. Пусть $0 \leq c \leq c^*$. Тогда u_n возрастает к решению u из (1) в смысле распределений $\Longleftrightarrow$ f удовлетворяет $\int\limits_{R^n} |x|^{-\alpha} f(x)dx < \infty$, где α меньший действительный корень уравнения $(N-2-\alpha)\alpha = c$.

Настоящая работа является обобщением результатов, полученных в работе [1], на системы сингулярных параболических уравнений. Отметим также, что доказательство результатов существенно использует методику работы [1]. Доказаны следующие теоремы.

Теорема 2 . *Пусть $\overline{u}_n(x,t)$ удовлетворяет задаче:*

$$\begin{cases} \frac{\partial \overline{u}_n}{\partial t} = \begin{pmatrix} q^1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & q^p \end{pmatrix} \Delta \overline{u}_n + \begin{pmatrix} V_n^{11}(x) & \dots & V_n^{1p}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ V_n^{p1}(x) & \dots & V_n^{pp}(x) \end{pmatrix} \overline{u}_n ; x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ \overline{u}_n(x,0) = \overline{u}_0(x) \ , \ (x \in \mathbb{R}^N) \end{cases} \tag{3}$$

$$\overline{u}_n = \begin{pmatrix} u_n^1 \\ \vdots \\ u_n^p \end{pmatrix}, \ \overline{u}_0 = \begin{pmatrix} u_0^1 \\ \vdots \\ u_0^p \end{pmatrix}, \ V_n^{ij}(x) = \begin{cases} c^{ij}/|x|^2, & |x| \geq 1/n \\ c^{ij}n^2, & |x| < 1/n \end{cases}$$

$$u_0^j \geq 0, \ u_0^j = L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N), \ j = \overline{1,p}.$$

При необходимости $V_n^{ij}(x)$ можно выбрать сглаженными. Пусть $c^{ii} > \pi^2 N^2 q/8$, $q = \max\{q^i\}$, $c^{ij} \geq 0$, $i,j = \overline{1,p}$. Тогда $\overline{u}_n(x,t) \to \infty$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$, $t > 0$.

Теорема 3 . *Пусть $\overline{u}(x,t)$ удовлетворяет задаче:*

$$\begin{cases} \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} = \begin{pmatrix} q^1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & q^p \end{pmatrix} \Delta \overline{u} + \begin{pmatrix} V^{11}(x) & \dots & V^{1p}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ V^{p1}(x) & \dots & V^{pp}(x) \end{pmatrix} \overline{u}, \ (x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0) \\ \overline{u}(x,0) = \overline{u}_0(x) \ , \ (x \in \mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{4}$$

$V^{ij}(x) = c^{ij}/|x|^2$. Пусть $S = \max_i S_i/q^i$, где S_i- сумма элементов i-й строки матрицы $\begin{pmatrix} c^{11} & \dots & c^{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ c^{pi} & \dots & c^{pp} \end{pmatrix}$. Если $S \leq (N-2)^2/4$, то (4) имеет неотрицательное решение.

Следуя работе [5], определим вероятностную меру $P_t(x,dy) := P_t(x-y)dy$, т.е. $P_t(x,\Gamma) = \int_\Gamma P_t(x-y)dy$, $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$, где $P_t(x) = (4\pi Dt)^{-N/2}\exp\{-|x|^2/4Dt\}$, $t > 0$, $D > 0$ - плотность функции для нормального распределения с параметрами $(0, 2D)$. Пусть $\dot{\mathbb{R}}^N$- одноточечная компактификация в $\mathbb{R}^N$, и пусть $\Omega =$ все непрерывные функции ω из $R^+ = [0,\infty)$ на $\dot{\mathbb{R}}^N$.

Определим ограниченную функцию φ из $C(\Omega)$ в R. $\varphi(\omega) = \Phi(\omega(t_1),\dots,\omega(t_n))$ для $\omega \in \Omega$, когда $n \in N$, $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < \infty$, $\Phi \in C(\Omega)^n, R)$.

Мера Винера W_x, определенная как мера Лебега на σ -алгебре цилиндрических множеств (см.[2]), обладает свойством

$$\int_{R^N} \cdots \int_{R^N} \Phi(x_1,\dots,x_n) P_{t_1}(x,dx_1)\dots P_{t_n - t_{n-1}}(x_{n-1},dx_n) = \int_\Omega \varphi(\omega) W_x(d\omega).$$

Кроме того, непрерывная функция $\omega : R^+ \to R^N$ удовлетворяет условию $\omega(0) = x$.

Меру Винера можно понимать как распределение случайных траекторий частицы, начинающей свое движение в момент времени $t = 0$ из точки x.

Напомним, что набор вероятностных мер W_x на Ω определяет винеровский процесс $\omega(t)$, если выполняются следующие условия:

а) пространство Ω содержит только непрерывные функции;

б) $W_x\{\omega(0) = x\} = 1$;

в) случайное приращение $\omega(t+s) - \omega(s)$ при $s \geq 0$, $t > 0$, имеет симметричное нормальное распределение с плотностью $P_t(x)$ и это приращение не зависит от любых событий и любых случайных величин, определяемых по поведению траектории $\omega(t)$ до момента s.

В частности, для любой области $\Gamma \subset \mathbb{R}$ (см. [4]):

$$W_x\{\omega(t) \in \Gamma\} = W_x\{\omega(t) - \omega(0) \in \Gamma - x\} =$$
$$= \int_{\Gamma - x} P_t(y)dy = \int_\Gamma P_t(z-x)dz \ \ (t > 0, x \in R).$$

Решением уравнения диффузии $\frac{\partial\psi}{\partial t} = a\Delta\psi + V(x,t)\psi$ является вероятность попадания частицы из начального состояния в точку (x,t). Рассматривая вклады отдельных траекторий в решение уравнения как значения плотности некоторой меры на соответствующих траекториях, получается представление решения в виде интеграла по этой мере, которое принято называть формулой Фейнмана-Каца.

Запишем (3) в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial\overline{u}_n}{\partial t} = A\overline{u}_n + B_n\overline{u}_n \\ \overline{u}_n(x,0) = \overline{u}_0(x) \end{cases}$$

По формуле $Lie - Trotter - Dalecky$ (см.[2], с.59)

$$\overline{u}_n(t) = \lim_{m\to\infty}(e^{\frac{t}{m}A}e^{\frac{t}{m}B_n})^m\overline{u}_0, \tag{5}$$

где операторы полугрупп заданы равенствами

$$e^{sA}\overline{u}_0(x) = \begin{pmatrix} (4\pi sq^1)^{-N/2}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\exp\{-|x-y|^2/4sq^1\}u_0^1(y)dy \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (4\pi sq^p)^{-N/2}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\exp\{-|x-y|^2/4sq^p\}u_0^p(y)dy \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$e^{sB_n}\overline{u}_0(x) = \exp\left\{s\cdot\begin{pmatrix} V_n^{11}(x) & \dots & V_n^{1p}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ V_n^{p1}(x) & \dots & V_n^{pp}(x) \end{pmatrix}\right\}. \tag{7}$$

Решением задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial\overline{u}_n}{\partial t} = A\overline{u}_n = \begin{pmatrix} q^1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & q^p \end{pmatrix}\Delta\overline{u}_n \\ \overline{u}_n(x,0) = \overline{u}_0(x) \end{cases}$$

является (6). Решением задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial\overline{u}_n}{\partial t} = B_n\overline{u}_n = \begin{pmatrix} V_n^{11}(x) & \dots & V_n^{1p}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ V_n^{p1}(x) & \dots & V_n^{pp}(x) \end{pmatrix}\overline{u}_n \\ \overline{u}_n(x,0) = \overline{u}_0(x) \end{cases}$$

является (7). Введем покоординатное частичное упорядочение в $\mathbb{R}^N$. Таким образом, из (6), (7) видно, что

$$(e^{\frac{t}{m}A}e^{\frac{t}{m}B_n}\overline{u}_0)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N}\begin{pmatrix} (4\pi\frac{t}{m}q^1)^{-N/2}e^{-\frac{|x-y|^2}{4t/mq^1}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & (4\pi\frac{t}{m}q^p)^{-N/2}e^{-\frac{|x-y|^2}{4t/mq^p}} \end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{\frac{t}{m}\begin{pmatrix} V_n^{11}(y) & \dots & V_n^{1p}(y) \\ \dots & \dots & \dots \\ V_n^{p1}(y) & \dots & V_n^{pp}(y) \end{pmatrix}\right\}\overline{u}_0(y)dy.$$

Тогда $(e^{\frac{t}{m}A}e^{\frac{t}{m}B_n})^m\overline{u}_0(x) =$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N}\begin{pmatrix} (4\pi\frac{t}{m}q^1)^{-\frac{N}{2}}\exp\{-\frac{|x-x_1|^2}{4t/mq^1}\} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & (4\pi\frac{t}{m}q^p)^{-\frac{N}{2}}\exp\{-\frac{|x-x_1|^2}{4t/mq^p}\} \end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot \exp\left\{\frac{t}{m}\begin{pmatrix} V_n^{11}(x_1) & \dots & V_n^{1p}(x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ V_n^{p1}(x_1) & \dots & V_n^{pp}(x_1)\end{pmatrix}\right\}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\dots$$

$$\dots\int\limits_{\mathbb{R}^N}\begin{pmatrix} (4\pi\frac{t}{m}q^1)^{-\frac{N}{2}}\exp\{-\frac{|x_m-x_{m-1}|^2}{4t/mq^1}\} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & (4\pi\frac{t}{m}q^p)^{-\frac{N}{2}}\exp\{-\frac{|x_m-x_{m-1}|^2}{4t/mq^p}\}\end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot \exp\left\{\frac{t}{m}\begin{pmatrix} V_n^{11}(x_m) & \dots & V_n^{1p}(x_m) \\ \dots & \dots & \dots \\ V_n^{p1}(x_m) & \dots & V_n^{pp}(x_m)\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} u_0^1(x_m) \\ \vdots \\ u_0^p(x_m)\end{pmatrix} dx_m\dots dx_1 \geq$$

$$\geq \int\limits_{\mathbb{R}^N}\begin{pmatrix} (4\pi\frac{t}{m}q^1)^{-N/2}\exp\{-\frac{|x-x_1|^2}{4t/mq^1}\} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & (4\pi\frac{t}{m}q^p)^{-N/2}\exp\{-\frac{|x-x_1|^2}{4t/mq^p}\}\end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot \exp\left\{\frac{t}{m}\begin{pmatrix} V_n^{11}(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & V_n^{pp}(x_1)\end{pmatrix}\right\}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\dots$$

$$\dots\int\limits_{\mathbb{R}^N}\begin{pmatrix} (4\pi\frac{t}{m}q^1)^{-\frac{N}{2}}\exp\{-\frac{|x_m-x_{m-1}|^2}{4t/mq^1}\} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & (4\pi\frac{t}{m}q^p)^{-\frac{N}{2}}\exp\{-\frac{|x_m-x_{m-1}|^2}{4t/mq^p}\}\end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot \exp\left\{\frac{t}{m}\begin{pmatrix} V_n^{11}(x_m) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & V_n^{pp}(x_m)\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} u_0^1(x_m) \\ \vdots \\ u_0^p(x_m)\end{pmatrix} dx_m\dots dx_1 =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N}\dots\int\limits_{\mathbb{R}^N}\begin{pmatrix} (4\pi\frac{t}{m}q^1)^{-\frac{N}{2}}\exp\{-\frac{|x-x_1|^2}{4t/mq^1}\} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & (4\pi\frac{t}{m}q^p)^{-\frac{N}{2}}\exp\{-\frac{|x-x_1|^2}{4t/mq^p}\}\end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot\dots\cdot\begin{pmatrix} (4\pi\frac{t}{m}q^1)^{-frac N2}\exp\{-\frac{|x_m-x_{m-1}|^2}{4t/mq^1}\} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & (4\pi\frac{t}{m}q^p)^{-\frac{N}{2}}\exp\{-\frac{|x_m-x_{m-1}|^2}{4t/mq^p}\}\end{pmatrix}\cdot$$

$$\exp\left\{\sum_{j=1}^m\frac{t}{m}\begin{pmatrix} V_n^{11}(x_j) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & V_n^{pp}(x_j)\end{pmatrix}\right\}\overline{u}_0(x_m)dx_m\dots dx_1 = \int\limits_{\mathbb{R}^N}\dots$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\begin{pmatrix} P_{\frac{t}{m}q^1}(x,dx_1)\dots P_{\frac{t}{m}q^1}(x_{m-1},dx_m) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & P_{\frac{t}{m}q^p}(x,dx_1)\dots P_{\frac{t}{m}q^p}(x_{m-1},dx_m)\end{pmatrix}$$

$$\exp\left\{\sum_{j=1}^m\frac{t}{m}\begin{pmatrix} V_n^{11}(x_j) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & V_n^{pp}(x_j)\end{pmatrix}\right\}\overline{u}_0(x_m) \xrightarrow[m\to\infty]{}$$

$$\int\limits_{\Omega}\begin{pmatrix} W_x^{q^1}(d\omega) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & W_x^{q^p}(d\omega)\end{pmatrix}\exp\left\{\int\limits_0^t\begin{pmatrix} V_n^{11}(s) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & V_n^{pp}(s)\end{pmatrix}ds\right\}\overline{u}_0(\omega(t)), \tag{8}$$

где $W_x^{q^i}$ удовлетворяет свойству:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\dots\int\limits_{\mathbb{R}^N}\Phi(x_1,\dots,x_n)P_{t_1q^i}(x,dx_1)\cdot\dots\cdot P_{(t_n-t_{n-1}q^i}(x_{n-1},dx_n) = \int\limits_{\Omega}\varphi(\omega)W_x^{q^i}(d\omega).$$

Предел левой части (8) при $m\to\infty$ равен $\overline{u}_n(x,t)$. Это следует из (5).

Утверждение 4 .

$$\overline{u}_n(x,t) \geq \int\limits_{\Omega} \begin{pmatrix} W_x^{q^1}(d\omega) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & W_x^{q^p}(d\omega) \end{pmatrix} \cdot$$
$$\cdot \exp\left\{ \int\limits_0^t \begin{pmatrix} V_n^{11}(s) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & V_n^{pp}(s) \end{pmatrix} ds \right\} \overline{u}_0(\omega(t)). \tag{9}$$

Утверждение 5 . *Если функция $\overline{u}(x,t)$ является решением задачи (4) и $V^{ij}(x) \cdot u^k(x,t) \in L_2(\mathbb{R}^N)$, то $\overline{u}(x,t) \in W_2^2(\mathbb{R}^N)$ и $\overline{u}(x,t) \geq \overline{u}_n(x,t)$, где $\overline{u}_n(x,t)$ является решением задачи (3) и функция $\overline{u}_0 \geq 0$, $\overline{u}_0 \in W_2^1(\mathbb{R}^N)$.*

Доказательство: Из априорной оценки (см.[3],с.173) получим принадлежность решения $\overline{u}(x,t)$ задачи (4) пространству $W_2^2(\mathbb{R}^N)$ и для разности $\overline{V}_n(x,t) = \overline{u}(x,t) - \overline{u}_n(x,t) \in W_2^2(\mathbb{R}^N)$ получаем систему уравнений с задачей Коши

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{V}_n}{\partial t} = \begin{pmatrix} q^1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & q^p \end{pmatrix} \Delta \overline{V}_n + \begin{pmatrix} V_n^{11} & \dots & V_n^{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ V_n^{p1} & \dots & V_n^{pp} \end{pmatrix} \overline{V}_n + \overline{f}_n \\ \overline{V}_n(x,0) = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Рассуждая для системы (10) как и в скалярном случае (см. [1]), получим, что $\overline{V}_n(x,t) \geq 0$, откуда следует заключение утверждения.

Доказательство теоремы 2: Следуя работе [5], фиксируем $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$ и предполагаем, что $u_0^j \geq \varepsilon_0$ для $|x - x_0| \leq \delta_0$, $\varepsilon_0 > 0$, $\delta_0 > 0$, $j = \overline{1,p}$, $0 < \alpha < 1/2$.

$$\Omega_n = \{\omega \in \Omega : \omega(0) = x,\ |\omega(t) - x_0| \leq \delta_0,\ |\omega(s)| < 1/n \text{ при } s \in I = [\alpha t, (1-\alpha)t]\}.$$

Оценим $\overline{u}_n$ снизу, продолжая оценку (9), полученную в утверждении 4.

$$\overline{u}_n(x,t) \geq \int\limits_{\Omega_n} \begin{pmatrix} W_x^{q^1}(d\omega) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & W_x^{q^p}(d\omega) \end{pmatrix} \cdot$$
$$\cdot \exp\left\{ \int\limits_{\alpha t}^{(1-\alpha)t} \begin{pmatrix} V_n^{11}(s) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & V_n^{pp}(s) \end{pmatrix} ds \right\} \overline{u}_0(\omega(t)) =$$

$$= \int\limits_{\Omega_n} \begin{pmatrix} W_x^{q^1}(d\omega) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & W_x^{q^p}(d\omega) \end{pmatrix} \exp\left\{ \gamma t n^2 \begin{pmatrix} c^{11} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & c^{pp} \end{pmatrix} \right\} \overline{u}_0(\omega(t)) =$$

$$\int\limits_{\Omega_n} \begin{pmatrix} W_x^{q^1}(d\omega) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & W_x^{q^p}(d\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp\{\gamma t n^2 c^{11}\} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \exp\{\gamma t n^2 c^{pp}\} \end{pmatrix} \overline{u}_0(\omega(t)) =$$

$$= \begin{pmatrix} \int\limits_{\Omega_n} \exp\{\gamma t n^2 c^{11}\} u_0^1(\omega(t)) W_x^{q^1}(d\omega) \\ \dots \\ \int\limits_{\Omega_n} \exp\{\gamma t n^2 c^{pp}\} u_0^1(\omega(t)) W_x^{q^p}(d\omega) \end{pmatrix} \geq \varepsilon_0 \cdot e^{\gamma t n^2 c} \begin{pmatrix} W_x^{q^1}(\Omega_n) \\ \vdots \\ W_x^{q^p}(\Omega_n) \end{pmatrix}$$

$$c = \min\{c^{ii}\}_{i=1}^{p}, \ \gamma = 1 - 2\alpha.$$

Пусть $N = 1$, $-\infty < a < b < +\infty$. $r = r([a, b])$ - время выхода траектории за пределы $[a, b]$ для одномерного броуновского распределения с началом в точке x (см.[7]). Т.е. $r(\omega) = \inf\{t > 0 : \omega(t) = a$ или $b, \omega(0) = x\}$. Известно, (см.[8]), что $W^{q^i}(x,t) = W_x^{q^i}\{\omega \in \Omega, r(\omega) > t\} = W_x^{q^i}\{r > t\}$ является решением задачи

$$\begin{cases} \frac{1}{q^i}\frac{\partial W^{q^i}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 W^{q^i}}{\partial x^2}, & 0 < x < 2b, \ t > 0, \\ W^{q^i}(t,0) = W^{q^i}(t,2b) = 0, & t > 0, \\ W^{q^i}(0,x) = 1, & 0 < x < 2b, \end{cases}$$

Тогда $W^{q^i}(x,t) = \sum\limits_{n-\text{неч}} \frac{4}{\pi n}\exp\{-\frac{\pi^2 n^2 q^i t}{8b^2}\}\sin(\frac{\pi n x}{2b})$. Следовательно,

$$W^{q^i}(\frac{1}{n}, t) \geq c_1 \exp\{-\frac{\pi^2 n^2 t q^i}{8}\}, \ c_1 < 4/\pi. \tag{11}$$

Известно (см. [1]), что при $x, x_0 \in \mathbb{R}^N$, $t > 0$, $\delta_0 > 0$, $0 < \alpha_1 < 1$

$$W_x^{q^i}(\Omega_n) \geq W_x^{q^i}\{\omega(\alpha t) < \alpha_1/n\} \cdot W_0^{q^i}\{|\omega(s)| < (1-\alpha_1)/n, s \in [0, (1-2\alpha)t\} \cdot$$

$$\cdot P\{|\omega(\alpha t) - x_0| \leq \delta_0 / |\omega(0)| < 1/n\} = p_1^{q^i} p_2^{q^i} p_3^{q^i}.$$

Пусть $t_1 = \alpha t$. Тогда $p_1^{q^i}$ и $p_2^{q^i}$ могут быть вычислены и оценены снизу, используя нормальное распределение. Оценка для $p_2^{q^i}$ получается при помощи неравенства (11).

$$p_1^{q^i} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t_1 q^i}} \int\limits_{-\alpha_1/n}^{\alpha_1/n} \exp\{-\frac{|s-x|^2}{4t_1 q^i}\}ds \geq$$

$$\geq (4\pi t\alpha q^i)^{-1/2}\frac{2\alpha_1}{n}\exp\{-\frac{x^2}{4\alpha t q^i} - \varepsilon_2\}, \ \varepsilon_2 > 0, \ n > N_2(\varepsilon_2, x, t, \alpha),$$

$$p_3^{q^i} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t_1 q^i}} \int\limits_{x_0-\delta_0}^{x_0+\delta_0} \exp\{-\frac{(s-\omega(0))^2}{4t_1 q^i}\}ds \geq$$

$$\geq (4\pi t\alpha q^i)^{-1/2} 2\delta_0 \exp\{\frac{(x_0+\delta_0)^2}{4\alpha t q^i} - \varepsilon_3\}, \ \varepsilon_3 > 0, \ n > N_3(\varepsilon_3, x, t, \alpha),$$

$$p_2^{q^i} = W_0^{q^i}\{r([-\frac{(1-\alpha_1)}{n}; \frac{(1-\alpha_1)}{n}]) > (1-2\alpha)t\} =$$

$$= W_{\frac{1-\alpha_1}{n}}^{q^i}\{r([0, \frac{2(1-\alpha_1)}{n}]) > (1-2\alpha)t\} = W^{q^i}(\frac{1-\alpha_1}{n}, (1-2\alpha)t) \geq$$

$$\geq \frac{4-\varepsilon_4}{\pi}\exp\{\frac{\pi^2 n^2 t(1-2\alpha)q^i}{(1-\alpha_1)^2 8}\}.$$

Таким образом, получаем оценку: $\forall i$

$$W_x^{q^i}(\Omega_n) \geq \frac{4\alpha_1\delta_0}{\pi\alpha t q^i}\frac{1}{n}\exp\{-\frac{q^i\pi^2 n^2 t(1-2\alpha)}{8-\varepsilon}\}\exp\{-(\frac{x^2}{4\alpha t q^i} + \frac{(x_0+\delta_0)^2}{4\alpha t q^i} + \varepsilon_5)\} \geq$$

$$\geq \frac{4\alpha_1\delta_0}{\pi\alpha t q}\frac{1}{n}\exp\{-\frac{q\pi^2 n^2 t(1-2\alpha)}{8-\varepsilon}\}\exp\{-(\frac{x^2}{4\alpha t q} + \frac{(x_0+\delta_0)^2}{4\alpha t q} + \varepsilon_6)\} =$$

$$= k_0\frac{1}{n}\exp\{-\frac{q\pi^2 n^2 t(1-2\alpha)}{8-\varepsilon}\}.$$

Пусть $N > 1$. Тогда, применяя N- мерное нормальное броуновское распределение (см.[1], [7]), получаем оценку

$$W_x^{q'} \geq (\frac{1}{n})^N k_0 \exp\{-\frac{q\pi^2 n^2(1-2\alpha)N^2 t}{8-\varepsilon}\},$$

где

$$k_0 = (\frac{4\alpha_1\delta_0}{\sqrt{N}\pi\alpha t q})^N \exp\{-\frac{N|x|^2}{4\alpha t q} - \frac{(N|x|^2+\delta_0^2)}{4\alpha t q} - \varepsilon\}.$$

Используя полученную оценку для $W_x^{q'}(\Omega_n)$ получаем

$$\overline{u}_n(x,t) \geq (\frac{1}{n})^N k_0\varepsilon_0 \exp\{(1-2\alpha)tn^2 c\} \exp\{-\frac{q\pi^2 n^2(1-2\alpha)N^2 t}{8-\varepsilon}\}. \qquad (12)$$

Теорему доказывает переход к пределу в неравенстве (12) при $n \to \infty$.

Доказательство теоремы 3: Будем искать неотрицательное решение (4) в виде $\overline{u} = r^{-\alpha}\begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^p \end{pmatrix}$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} c^{11}b^1 - q^1\alpha(n-2-\alpha)b^1 + c^{12}b^2 + \cdots + c^{1p}b^p = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c^{p1}b^1 + c^{p2}b^2 + \cdots + c^{pp}b^p - q^p\alpha(N-2-\alpha)b^p = 0 \end{cases}.$$

Приравнивая к нулю определитель данной системы и обозначая $\alpha(N-2-\alpha) = \lambda$, получим:

$$\begin{vmatrix} c^{11}/q^1 - \lambda & c^{12}q^1 & \dots & c^{1p}/q^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c^{p1}/q^p & c^{p2}/q^p & \dots & c^{pp}q^p - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

По теореме Перрона - Фробениуса (см. [6]) для неотрицательных матриц максимальному характеристическому числу матрицы соответствует положительный собственный вектор. Пусть λ - максимальное характеристическое число матрицы

$$\begin{pmatrix} c^{11}/q^1 & \dots & c^{1p}/q^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ c^{p1}q^p & \dots & c^{pp}/q^p \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\alpha \in R$ при $\lambda \leq (N-2)^2/4$. По теореме Фробениуса (см. [6]) $s \leq \lambda \leq S$ для неотрицательных матриц, где $s = \min_i\{s_i/q^i\}$, $S = \max_i\{s_i/q^i\}$, s_i - сумма элементов i-й строки матрицы $\begin{pmatrix} c^{11} & \dots & c^{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ c^{p1} & \dots & c^{pp} \end{pmatrix}$.

Это доказывает теорему.

1. *Baras P., Goldstein I.A*, The heat equation with a singular potential // Trans. of the Am. Math. Soc. - 1984. - **284**, - N 4. - P.121-139.
2. *Далецкий Ю.Л.* , Континуальные интегралы, связанные с операторными эволюционными уравнениями // Успехи мат. наук. - 1962. - *XYII* - Вып. 5 (107). - С. 3-115.
3. Дифференциальные уравнения с частными производными -I. -М. Итоги науки. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления // Изд. ВИНИТИ, 1990.

4. *Дынкин Е.Б., Юшкевич А.А.* , Теоремы и задачи о процессах Маркова // М. : Наука, 1967.
5. *Goldstein I.A.*, Three lectures on applied analysis // Препринт 7-6-90, Воронеж Изд. ВГУ. – 1990. С. – 4–12.
6. *Маркус М., Минк Х.* , Обзор по теории матриц и матричных неравенств // М. : Наука, 1972.
7. *H.P.McKean*, Stochastic integrals // New York, Academic Press, 1969.
8. *S.I. Rosencrans*, Differential and partial differential equations // Lecture Notes, New Orlean - Tulane Univ. – 1977–1978.